RĪGAS TEHNISKĀS KOLEDŽA

I.Klotiņa

IEVADS KĻŪDU TEORIJĀ

2011.

1. FIZIKĀLO LIELUMU MĒRĪŠANA

Pieredze apstiprina, ka dažādus tipiskus objektus var savā starpā salīdzināt tikai pēc tādām īpašībām, kuras raksturo ar vienāda nosaukuma skaitļiem.
Piemēram, dažādus ķermeņus var raksturot ar masu un temperatūru, bet salīdzināt var tikai masas vai temperatūras.

Fizikāla lielumu mērīšana ir tā skaitlisks novērtējums dotajai īpašībai pieņemtajās vienībās.
Piemēram, par masas vienību var izvēlēties elektrona masu, par temperatūras vienību – vienu simto daļu no ūdens vārīšanās un kušanas temperatūru starpības.
Mērīšanas rezultātu raksturo skaitliska vērtība un mērvienība.
Piemēram, 3 kg. 20 m, 0,3 A.

Par **tiešiem mērījumiem** sauc mērījumus, kuros fizikāla lieluma vērtību iegūst tieši no mērierīces.
Piemēram, garuma mērīšana ar lineālu, laika mērīšana ar pulksteni.

Par **netiešiem mērījumiem** sauc mērījumus, kuru rezultātā vēlamā lieluma skaitlisko vērtību nosaka, izmantojot funkcionālu sakarību starp šo lielumu un lielumiem, kurus iegūst ar tiešajiem mērījumiem.
Piemēram, ātruma noteikšana pēc izmērītā ceļa garuma un laika, kādā šis ceļš veikts, blīvuma noteikšana, izmērot masu un tilpumu.

2. MĒRĪJUMU KĻŪDAS

Attiecībā uz makroskopiskiem objektiem pieņemts uzskatīt, ka fizikālā lieluma **patiesā vērība** nav atkarīga no mērīšanas metodēm un šādā izpratnē ideāli pareizi atspoguļo objekta īpašības.

Mērījuma rezultāts turpretī ir atkarīgs ne tikai no paša lieluma, bet arī no tehniskajiem līdzekļiem, ar kuriem tiek veikta mērīšana.

Mērīšanas rezultāta pamatīpašība – tas nekad nedod mērāmā lieluma precīzu vērtību, bet norāda, ka tā vērtība ietilpst lielākā vai mazākā intervālā.

Par **mērījuma rezultāta kļūdu** sauc mērījuma rezultāta x un mērāmā lieluma a patiesās vērtības starpību

$$\Delta = x - a$$

Kļūdas, kuru izcelsme ir zināma, sauc par **korekcijām.**
Korekcija ir skaitlis, kas algebriski jāpieskaita mērskaitlim, lai dabūtu mērāmā lieluma precīzu vērtību.
Piemēram, ja mikrometra rādījums pie $a = 0$ ir $x = 0{,}01$ mm, tad $\Delta = x - a = 0{,}01$ mm
Patvaļīgam garumam a būs spēkā sakarība $a = x - \Delta = x - 0{,}01$ mm

Nezināma korekcija tiek saukta par **mērījumu kļūdu**. Izšķir rupjas, sistemātiskas un gadījuma kļūdas.

Rupjas kļūdas rodas no neuzmanības, pārskatīšanās vai pārrakstīšanās.

Sistemātiska kļūda ir tā mērījuma kļūdas komponente, kura paliek nemainīga vai likumsakarīgi mainās, atkārtoti mērot vienu un to pašu fizikālo lielumu.
Piemēram, mērot ķermeņa masu ar neprecīziem atsvariem rodas sistemātiska kļūda.

Elektriskiem mērinstrumentiem precizitātes klase vienāda ar sistemātisko kļūdu (%() no mērapjoma.
Piemēram, ampērmetram, kura precizitātes klase 0,5 un mērapjoms 5 A, sistemātiska kļūda Δ_{sist} = (5 A ·0,5 %)/100% = 0,025 A

Par **gadījuma kļūdām** sauc kļūdas, kuru cēloņi un lielumi nekontrolējami mainās. Gadījuma kļūdas var konstatēt, ja atkārtoti mēra vienu un to pašu lielumu un iegūst atšķirīgus rezultātus.
Piemēram, mērot ķermeņa garumu ar mērlineālu, kas sadalīts milimetros, veselos milimetrus (ar kļūdu, kas nepārsniedz sistemātisko) nolasa uz mērlineāla, bet milimetra daļu novērtējums pēc acumēra ir par cēloni gadījuma kļūdai Δ_{gad}.

Ja gadījuma kļūda ir mazāka par sistemātisko kļūdu, t.i., $\Delta_{gad} < \Delta_{sist}$, tad atkārtotiem mērījumiem ar nolūku samazināt gadījuma kļūdu nav jēgas.

Pretējā situācijā, ja gadījuma kļūda pārsniedz sistemātisko t.i., ., $\Delta_{gad} < \Delta_{sist}$, nepieciešams izdarīt atkārtotus mērījumus un, izmantojot varbūtību teorijas rezultātus, aprēķināt varbūtību, ka gadījuma kļūdas skaitliskā vērtība nepārsniedz kādu iepriekš dotu intervālu. Augstas klases mērījumiem raksturīga tieši pēdējā situācija, kad to skaitliskais novērtējums izpaužas, kā visai noteikta intervāla izdalīšana no visu dotā lieluma vērtību skalas.

Reālā eksperimentā jācenšas samazināt gadījuma kļūdu Δ_{gad}, kuras lielums atkarīgs no atsevišķām to veidojošām kļūdām:

1) nolasīšanas ($\pm\Delta_{nol}$);
2) nostādīšanas ($\pm\Delta_{nost}$);
3) mērāmā objekta ($\pm\Delta_{obj}$), piemēram, nosakot elastības moduli pēc stīgas pagarinājuma, to slogojot, svarīgs mērījums ir stīgas diametrs; mērskaitļu atšķirību rada apstāklis, ka stīga izgatavošanas procesā nav izstiepta gluži cilindriska, bet mazliet koniska;
4) apkārtnes ($\pm\Delta_{apk}$), piemēram, mērot kāda stieņa garumu, mērījumi nesakritīs, ja starplaikā būs izmainījusies apkārtnes temperatūra.

Protams, ne katrreiz iepriekš minētie kļūdu avoti ietekmē mērskaitli visi vienā virzienā, to palielinot vai samazinot. Tas nozīmē, ka ne katrreiz visas parciālās kļūdas ir ar vienādu zīmi (+ vai -).

Mērījuma rezultāta **gadījuma kļūdas** vērtību iegūst saskaitot atsevišķas to veidojošās kļūdas un summai pierakstot "±" zīmi

$$\Delta_{gad} = \pm(\left|\Delta_{nol}\right| + \left|\Delta_{nost}\right| + \left|\Delta_{obj}\right| + \left|\Delta_{apk}\right|)$$

Mērījuma rezultāta maksimālās kļūdas vērtību iegūst summējot iepriekš minētās sistemātiskās un gadījuma kļūdas

$$\Delta_{\max} = \pm\left|\Delta_{sist} + \Delta_{gad}\right|$$

3. SVARĪGĀKIE VARBŪTĪBU TEORIJAS JĒDZIENI

Mērījumu rezultātu apstrāde un sevišķi gadījuma kļūdu aprēķināšana balstās uz varbūtību teorijas rezultātiem. Attiecībā uz tiešiem mērījumiem tiek postulēts, ka pie liela atkārtotu mērījumu skaita rezultāti ar lielām novirzēm un novirzes ar pretējām zīmēm sastopamas vienādi bieži.

Ja lielums x tiek mērīts n reizes un iegūti mērskaitļi x_1, x_2, ...x_n, tad

$$x_i = x + \Delta x_i$$

kur atsevišķa mērskaitļa kļūda

$$\Delta x_i = x_i - x$$

Summējot pa locekļiem visus n vienādojumus, iegūst

$$\sum x_i = nx + \sum \Delta x_i$$

Saskaņā ar postulātu

$$\lim \sum \Delta x_i = 0$$

un, ja mērījumu skaits neierobežoti aug

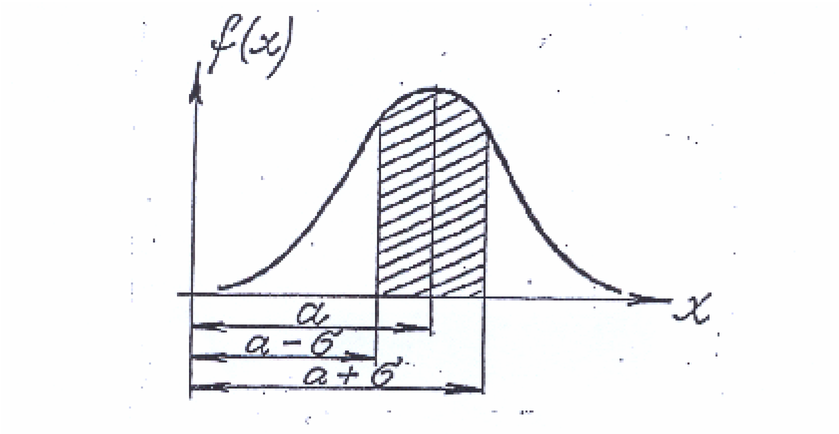
$$x = \frac{\sum x_i}{n}$$

Vienādojuma labo pusi sauc par mērījumu rezultāta **vidējo aritmētisko vērtību.**

Praktiski mērījumu skaits ir galīgs lielums un mērījumu rezultātu vidējā aritmētiskā vērtība tikai aptuveni atbilst lieluma vērtībai. Gadījuma lielums raksturo sadalījuma blīvuma funkciju. Visbiežāk sastopama ir normālā sadalījuma jeb Gausa sadalījuma funkcija

$$f(x) = \frac{1}{\sigma 2\pi} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]$$

a – gadījuma lieluma vidējā vērtība;
σ^2 – gadījuma lieluma dispersija.



Attēls 3.1. Normālā sadalījuma jeb Gausa sadalījuma funkcija.

Līknes forma atkarīga no σ un a vērtībām, jo mazāks σ, jo tuvāk vidējai vērtībai a atrodas vairums gadījuma lieluma vērtību.

Varbūtību, ka mērījuma rezultāts atšķiras no patiesās vērtības ne vairāk kā par Δx, izsaka ar **drošību** (drošības koeficientu). Vērtību intervālu no $x_{vid} - \Delta x$ līdz $x_{vid} + \Delta x$ sauc par **drošības intervālu**.

Gadījuma novirzes Δx_i absolūtā vērtība dažādiem mērskaitļiem ir dažāda. To raksturo

1) caurmēra kļūda, kas ir visu dotajos mērīšanas apstākļos, iespējamo kļūdu absolūto vērtību vidējā aritmētiskā vērtība

$$c = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n}{n} = \pm \frac{\sum \Delta x_i}{n}$$

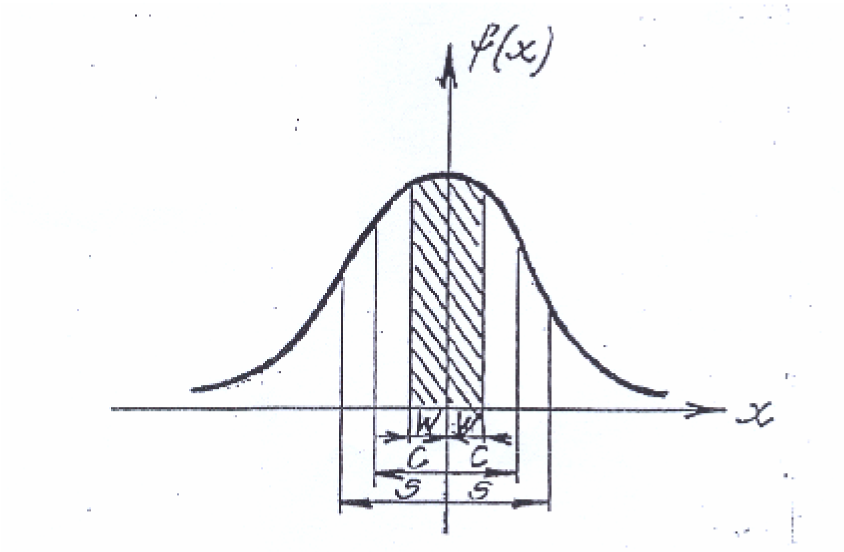
2) vidējā kļūda veido ap mērskaitli intervālu no x – S līdz x + S. Kā izriet no kļūdu terorijas, apmēram 2 reizes drošāk, ka īstā vērtība ir šajā intervālā nevis ārpus tā. To var izteikt šādi

$$S = \pm \frac{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \ldots + \Delta x_n^2}{n-1} = \pm \frac{\sum \Delta x_i^2}{n-1}$$

3) varbūtējo kļūdu atrod sarindojot daudzos mērījumos iegūto gadījuma noviržu absolūtās vērtības augošā vai dilstošā rindā un pieņemot šīs rindas vidū esošo vērtību par w. Tātad

$$|\Delta x_1| \le |\Delta x_2| \le \ldots \le |\Delta x_{k-1}| \le |\Delta x_i| \le |\Delta_{k+1}| \le \ldots \le |\Delta x_{2k-1}|$$

Kļūdu c, S un w fizikālo jēgu var izprast aplūkojot zīmējumu, kur uz abscisu ass atlikti šie lielumi.



Attēls 3.2. Normālā sadalījuma jeb Gausa sadalījuma funkcija. c – caurmēra kļūda; S – vidējā kļūda; w – varbūtējā kļūda.

Jāievēro, ka viss laukums zem Gausa līknes ir vienāds ar 1. Šīs varbūtības lielums ir drošība. Drošība varbūtējai kļūdai ir $\gamma_w = 0{,}5$, vidējai kļūdai $\gamma_S = 0{,}68$, caurmēra kļūdai $\gamma_c = 0{,}57$ (ja $n \rightarrow \infty$). Ja ir neliels mērījumu skaits n, tad kļūdu c, S un w vērtības ir aptuvenas, bet γ līdz ar mērījumu skaita n samazināšanos dilst. Tāpēc mērījumu skaits n nedrīkst būt pārāk mazs. Nekādā gadījumā n nedrīkst būt mazāks par 5.

Ja atsevišķa mērskaitļa vidējā kļūda

$$S = \pm \frac{\sum \Delta x^2}{n-1}$$

tad vidējai aritmētiskai kļūdai ir jābūt mazākai. Tā kā vidējā aritmētiskā kļūda ir tuvāka patiesai vērtībai, jo lielāks ir novērojumu skaits, tad šīs vērtības kļūda samazinās palielinoties novērojumu skaitam n.

Vidējās aritmētiskās vērtības vidējā kvadrātiskā kļūda V_{kv}

$$V_{kv} = \pm \sqrt{\frac{S}{n}} = \pm \sqrt{\frac{\sum \Delta x_i^2}{n(n-1)}}$$

Vidējās aritmētiskās vērtības caurmēra kļūda c un varbūtējā kļūda attiecīgi ir šādas

$$c = \pm \frac{c}{n} = \pm \frac{\sum \Delta x_i}{n \cdot n}$$

$$w = \pm \frac{w}{n}$$

Ja mērījumu skaits n ir mazs, tad aprēķinot kļūdas pēc formulām, kuras izriet no Gausa teorijas, iegūstam mākslīgi palielinātu rezultāta precizitāti. Šādos gadījumos vai nu lieto kļūdu sadalījumus, piemēram, Stjūdenta sadalījumu, kas atkarīgs arī no mērījumu skaita vai arī vienkārši atrod maksimālo kļūdu.

Maksimālā kļūda, kurā būtu ietvertas visas gadījuma kļūdas ar varbūtību 1, teorētiski būtu ļoti liela. Daudzos gadījumos par maksimālo kļūdu var izraudzīties trīskārtīgu vidējo kļūdu (drošība $\gamma = 0{,}997$). Par šo kļūdu lielāka var būt tikai 1/368 no visām kļūdām.

Lielumu S raksturo gadījuma noviržu Δx_i sadalījumu pēc absolūtās vērtības.

Lielumu V_{kv} raksturo vidējo vērtību x_{vid} sadalījumu, kuras iegūtas dažādos izvēles mērījumos.

Gadījumos, kad mērāmā objekta kļūda ir liela salīdzinājumā ar pārējām kļūdām, par maksimālo kļūdu izraugās trīskāršotu vidējo kļūdu

$$K_{max} = \pm 3S$$

Pārējos gadījumos par maksimālo kļūdu izraugās trīskāršotu vidējo kvadrātisko kļūdu

$$K_{max} = \pm 3V_{kv}$$

Relatīvā kļūda raksturo mērījuma kvalitāti. Tā rāda, kāda daļa no mērskaitļa ir kļūdaina. Relatīvo kļūdu izsaka procentos.

Ja mērskaitlis un tā absolūtā kļūda $x_i \pm \Delta x$, tad relatīvā kļūda

$$R = \pm \frac{\Delta x}{x_i} \cdot 100\%$$

Atkarībā no izraudzītās absolūtās kļūdas izšķir maksimālo, vidējo, caurmēra un varbūtējo relatīvo kļūdu.

4. MĒRĪJUMA REZULTĀTA MAKSIMĀLĀS KĻŪDAS APRĒĶINĀŠANA AR VIDĒJĀS KVADRĀTISKĀS KĻŪDAS METODI

4.1. TIEŠIE MĒRĪJUMI

Pieņemsim, ka atkārtoti tiek mērīts stieņa garums. Kļūdas risinājuma pārskatāmībai jāveido tabula.

l_i	l_{vid}	$\Delta l_i = l_{vid} - l_i$	Δl_i^2
25,0	25,2	+0,2	0,04
25,3		- 0,1	0,01
25,4		- 0,2	0,04
25,2		0	0
25,1		+0,1	0,01
$\Sigma\, l_i = 126$		$\Sigma\, \Delta l_i = 0$	$\Sigma\, (\Delta l_i)^2 = 0{,}1$

Izmantojot formulu vidējās kvadrātiskās kļūdas aprēķināšanai

$$V_{kv} = \pm\sqrt{\frac{\sum \Delta l_i^2}{n(n-1}}$$

kur n = 5 – mērījumu skaits.
Skaitliski

$$V_{kv} = \pm\sqrt{\frac{0,1}{5(5-1)}} = \pm\sqrt{0,005} = \pm 0,07$$

Uzskatot, ka vislielāko daļu kļūdas vērtībā ienes nolasījuma kļūda, rezultāta maksimālo kļūdu izsaka šādi

$$K_{\max} = \pm 3V_{kv}$$

Skaitliski

$$K_{\max} = \pm 3 \cdot 0,07 = \pm 0,21$$

Rezultāts
$l_{vid} \pm K_{max}$ = (25,2 ± 0,2) cm = (25,2 ± 0,2)10^{-2} m
R = ± 0,8 %

4.2. NETIEŠIE MĒRĪJUMI

Pieņemsim, ka darba uzdevums ir aprēkināt brīvās krišanas paātrinājumu izmantojot formulu

$$g = \frac{4\pi^2 \ln^2}{t^2}$$

Izdarīti palīgmērījumi: 5 reizes tiek izmainīts svārsta garums l, saglabājot vienādu svārstību skaitu – 10; 5 reizes izmainās arī svārstību laiks

Iegūti šādi mērījumi, kurus izmantojot katrā gadījumā tiek aprēķināts brīvās krišanas paātrinājums

n	l ± Δl (m)	t ± Δt (s)	g (m/s^2)
10	0,520 ± 0,002	14,0 ± 0,2	10,46
10	0,450	13,0	10,50
10	0,360	12,0	9,86
10	0,330	11,8	9,35
10	0,250	10,0	9,86

Brīvas krišanas paatrinajumu vidējā vērtība

$$g_{vid} = \frac{g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5}{5} = \frac{10,46 + 10,50 + 9,86 + 9,35 + 9,86}{5} = 10,006$$

Lai aprēķinātu rezultāta vidējo kvadrātisko kļūdu un maksimālo kļūdu, tiek veidota tabula

g_{vid} (m/s^2)	g_{vid} - g_i	(g_{vid} - g_i)^2
10,006	- 0,454	0,21
	- 0,494	0,24
	0,146	0,02

	0,656	0,43
	0,146	0,02
	$\sum = 0$	$\sum = 0,92$

Vidējā kvadrātiskā kļūda tiek aprēķināta pēc formulas

$$V_{kv} = \pm\sqrt{\frac{\sum(g_{vid} - g_i)^2}{n(n-1)}}$$

n = 5

$$V_{kv} = \pm\sqrt{\frac{0,92}{5(5-1)}} = \pm\sqrt{0,046} = \pm 0,214$$

Maksimālā kļūda

$$K_{max} = \pm\ 3V_{kv} = \pm\ 3\cdot 0,214 = \pm\ 0,642$$

Relatīvā kļūda

$$R = \pm\frac{K_{max}}{g_{vid}}\cdot 100\% = \pm\frac{0,642}{10,006}\cdot 100\% = \pm 6,416\%$$

Rezultāts

$g_{vid} \pm K_{max} = 10,006 \pm 0,642 = (10,01 \pm 0,64)\ m/s^2$

R = ± 6,416 % = ± 6,4 %

5. MĒRĪJUMA REZULTĀTA MAKSIMĀLĀS KĻŪDAS APRĒĶINĀŠANA AR IEVIETOŠANAS METODI

Šo metodi pielieto maksimālās kļūdas aprēķināšanai, ja meklējamo rezultātu iegūst aprēķinot to no dažiem tiešiem palīgmērījumiem. Palīgmērījumiem katram ir sava kļūda. To ietekmi uz rezultāta kļūdu sauc par parciālajām kļūdām netiešajā mērīšanā. Metode pielietojama visos tajos gadījumos, ja starp rezultātu un kādu no formulā ietilpstošajiem lielumiem pastāv funkcionāla sakarība, kā arī tad, ja tiešo mērījumu skaits n < 5.

Vispārīgā gadījumā pieņem, ka meklējamo rezultātu var aprēķināt pēc izteiksmes

$$X = f(a, b, c, ...n)$$

kur izmērīts

$$a = A \pm \Delta A$$
$$b = B \pm \Delta B$$
$$c = C \pm \Delta C$$
$$...$$

$$n = N \pm \Delta N$$

A, B, C,...N – palīgmērījumos iegūtie merskaitļi
ΔA, ΔB, ΔC,...ΔN – mērījumu kļūdas

Rezultāta maksimālā kļūda

$$K_{max} = \pm(|\Delta X_A| + | \Delta X_B| + | \Delta X_C| +...+ |\Delta X_N|)$$

Vienāda ar atsevišķo lielumu parciālo kļūdu summu, kur

$$\Delta X_A = \pm|X_{\Delta A} - X|$$
$$\Delta X_B = \pm|X_{\Delta B} - X|$$
$$\Delta X_C = \pm|X_{\Delta C} - X|$$
$$,...$$
$$\Delta X_N = \pm|X_{\Delta N} - X|$$

PIEMĒRI

1. **Izmantojot Oma likumu, jāaprēķina ķēdes posmā ieslēgtā vadītāja pretestība**

Izmērīts:

$$I \pm \Delta I = (0{,}69 \pm 0{,}01)\ A$$
$$U \pm \Delta U = (4{,}20 \pm 0{,}02)\ V$$

Aprēķināts

$$R = \frac{U}{I} = \frac{4{,}20}{0{,}69} = 6{,}09(\Omega)$$

Rezultāta maksimālā kļūda

$$K_{max} = \pm(|\Delta R_U| + | \Delta R_I|)$$

kur sprieguma U parciālā kļūda

$$\Delta R_U = \pm |\Delta R_U - R| =$$
$$= \pm \frac{U - \Delta U}{I} - R =$$
$$= \pm \frac{4{,}20 + 0{,}02}{0{,}69} - 6{,}09 = \pm 0{,}03(\Omega)$$

strāvas stipruma I parciālā kļūda

$$\Delta R_I = \pm |\Delta R_I - R| =$$
$$= \pm \frac{U}{I + \Delta I} - R =$$
$$= \pm \frac{4{,}20}{0{,}69 + 0{,}01} - 6{,}09 = \pm 0{,}09(\Omega)$$

Pretestības R maksimālā kļūda vienāda ar abu parciālo kļūdu absolūto vērtību summu

$$K_{max} = \pm(|0{,}03| + | 0{,}09|) = \pm 0{,}12\ (\Omega)$$

$$R = \pm\frac{K_{\max}}{R}\cdot 100\% = \pm\frac{0,12}{6,09}\cdot 100\% = \pm 2\%$$

Rezultāts

$$R \pm K_{max} = 6{,}09 \pm 0{,}12\ (\Omega)$$
$$R = \pm 2\ \%$$

2. Jāaprēķina ķermeņa temperatūra, izmantojot vienādojumu

$$t_1 = \frac{1}{c_1 m_1}[c_2 m_2(t - t_2) + c_3 m_3(t - t_3) + c_1 m_1 t]$$

Izmērīts

$m_1 \pm \Delta m_1 = (0{,}063 \pm 0{,}001)$ kg
$m_2 \pm \Delta m_2 = (0{,}037 \pm 0{,}001)$ kg
$m_3 \pm \Delta m_3 = (0{,}093 \pm 0{,}001)$ kg
$t_2 \pm \Delta t_2 = (28{,}00 \pm 0{,}25)$ ºC
$t_3 \pm \Delta t_3 = (28{,}00 \pm 0{,}25)$ ºC
$t \pm \Delta t = (32{,}00 \pm 0{,}25)$ ºC

Dots
$c_1 = 0{,}46 \cdot 10^3$ J/kg·K
$c_2 = 0{,}88 \cdot 10^3$ J/kg·K
$c_3 = 4{,}20 \cdot 10^3$ J/kg·K

Aprēķināts

$t_1 = 1/(0{,}46 \cdot 10^3 \cdot 0{,}063)[\ 0{,}88 \cdot 10^3 \cdot 0{,}037(32 - 28) + 4{,}20 \cdot 10^3 \cdot 0{,}093(32 - 28)$
$+ 0{,}46 \cdot 10^3 \cdot 0{,}063 \cdot 32] = 91{,}32$ (ºC)

Rezultāta maksimālā kļūda

$$K_{max} = \pm (|\Delta t_{1m1}| + |\Delta t_{1m2}| + |\Delta t_{1m3}| + |\Delta t_{1t}| + |\Delta t_{1t2}| + |\Delta t_{t3}|)$$

kur masas m_1 parciālā kļūda

$\Delta t_{1m1} = \pm(|\Delta t_{1m1} - t_1| = \pm |\{1/[c_1(m_1 + \Delta m_1)]\}[c_2 m_2(t - t_2) + c_3 m_3(t - t_3) +$
$c_1(m_1 + \Delta m_1)t] - t_1| =$
$= \pm|\{1/[0{,}46 \cdot 10^3(0{,}063 + 0{,}001)]\}[\ 0{,}88 \cdot 10^3 \cdot 0{,}037(32\text{-}28) +$
$4{,}20 \cdot 10^3 \cdot 0{,}093(32\text{-}28) + 0{,}46 \cdot 10^3 \cdot 32(0{,}063 + 0{,}001)] - 91{,}32 = \pm 1{,}74$

masas m_2 parciālā kļūda

$\Delta t_{1m2} = \pm(|\Delta t_{1m2} - t_1| = \pm |[1/(c_1 m_1)][c_2 (m_2 + \Delta m_2)(t - t_2) + c_3 m_3(t - t_3) +$
$+ c_1 m_1 t] - t_1| = \pm 5{,}185$

masas m_3 parciālā kļūda

$$\Delta t_{1m3} = \pm(|\Delta t_{1m3} - t_1| = \pm |[1/(c_1 m_1)][c_2 m_2(t - t_2) + c_3 (m_3 + \Delta m_3)(t - t_3) + c_1 m_1 t] - t_1| = \pm 0{,}968$$

temperatūras t parciālā kļūda

$$\Delta t_{1t} = \pm(|\Delta t_{1t} - t_1| = \pm |[1/(c_1 m_1)][c_2 m_2 [(t + \Delta t) - t_2] + c_3 m_3 [(t + \Delta t) - t_3) + c_1 m_1 (t + \Delta t)] - t_1| = \pm 3{,}07$$

temperatūras t_2 parciālā kļūda

$$\Delta t_{1t2} = \pm(|\Delta t_{1t2} - t_1| = \pm |[1/(c_1 m_1)][c_2 m_2 [t - (t_2 + \Delta t_2)] + c_3 m_3 (t - t_3) + c_1 m_1 t] - t_1| = \pm 0{,}095$$

temperatūras t_3 parciālā kļūda

$$\Delta t_{1t3} = \pm(|\Delta t_{1t3} - t_1| = \pm |[1/(c_1 m_1)][c_2 m_2 (t - t_2) + c_3 m_3 [t - (t_3 + \Delta t_3)] + c_1 m_1 t] - t_1| = \pm 3{,}038$$

Rezultāta maksimālā kļūda

$$K_{max} = \pm(1{,}74 + 5{,}185 + 0{,}968 + 3{,}07 + 0{,}095 + 3{,}038) = \pm 14{,}096$$

Rezultāta relatīvā kļūda

$$R = \pm\frac{K_{max}}{t_1}\cdot 100\% = \pm\frac{14{,}096}{91{,}32}\cdot 100\% = \pm 15\%$$

Rezultāts

$$t_1 \pm K_{max} = (91{,}32 \pm 14{,}10)\ ^{o}C$$
$$R = \pm 15\ \%$$

6. MĒRĪJUMA REZULTĀTA MAKSIMĀLĀS KĻŪDAS APRĒĶINĀŠANA AR DIFERENCĒŠANAS METODI

Metode pamatojas uz diferenciālrēķinu pielietojumu. Rezultātu, ko iegūst pēc kādas formulas uzskata kā zināmu skaitu argumentu funkciju. Argumentu skaits atbilst tiešo mērījumu skaitam, to saistība noteikta ar formulu. Rezultāta maksimālā kļūda šajā gadījumā atbilst funkcijas izmaiņai – pilnam diferenciālim, ko iegūst izmainoties visiem argumentiem (tiešiem mērījumiem) par vērtībām, kas vienlīdzīgas tiešo mērījumu kļūdām.

Tātad, ja rezultāts

$$X = f(a, b, c, ..., n)$$

kur a, b, c,...,n – funkcijas argumenti (tiešie mērījumi), maksimālā kļūda

$$K_{max} = \pm|dX| = \pm\left|\frac{\delta X}{\delta a}da + \frac{\delta X}{\delta b}db + \frac{\delta X}{\delta c}dc\right|$$

PIEMĒRS

Kļūdas aprēķināšanai tiek izmantots iepriekšējais piemērs R = f(U, I) = $\frac{U}{I}$

Izmērīts:

$$I \pm \Delta I = (0{,}69 \pm 0{,}01)\ A$$
$$U \pm \Delta U = (4{,}20 \pm 0{,}02)\ V$$

Aprēķināts

$$R = \frac{U}{I} = \frac{4{,}20}{0{,}69} = 6{,}09(\Omega)$$

Maksimālā kļūda

$$K_{max} = \pm|dR| = \pm\left|\frac{\delta R}{\delta U}dU + \frac{\delta R}{\delta I}dI\right| = \pm\left|\frac{\delta}{\delta U}(\frac{U}{I})dU + \frac{\delta}{\delta I}(\frac{U}{I})dI\right|$$

Tā kā $\frac{\delta}{\delta U}(\frac{U}{I}) = \frac{1}{I}$ un $\frac{\delta}{\delta I}(\frac{U}{I}) = -\frac{U}{I^2}$

Tad

$$K_{max} = \pm|dR| = \pm\left|\frac{dU}{I} + \frac{-UdI}{I^2}\right|$$

Maksimālās nolasījuma kļūdas ΔU un ΔI savstarpēji neatkarīgas un to vērtības ir galīgi lielumi. Tāpēc varam pielīdzināt ΔU = dU un ΔI = dI. Līdz ar to

$$K_{max} = \pm|\Delta R| = \pm\left|\frac{\Delta U}{I} + \frac{-U\Delta I}{I^2}\right|$$

Skaitliski

$$K_{max} = \pm(\left|\frac{0{,}02}{0{,}69} + \frac{-4{,}20\cdot 0{,}01}{0{,}69^2}\right|) = \pm(|0{,}03| + |-0{,}09|) = \pm 0{,}12(\Omega)$$

Relatīvā kļūda

$$R = \pm\frac{K_{max}}{R}\cdot 100\% = \pm\frac{0{,}12}{6{,}09}\cdot 100\% = \pm 2\%$$

Rezultāts

$$R \pm K_{max} = 6{,}09 \pm 0{,}12\ (\Omega)$$
$$R = \pm 2\ \%$$

7. KĻŪDU UN REZULTĀTU NOAPAĻOŠANA

Iegūto rezultātu un tā kļūdu noapaļo atmetot ciparus, kam nav nekādas ticamības un kas rezultātu padara nepārskatāmu.

Noapaļo vispirms rezultāta kļūdu 10% robežās. Ieteicams uz augšu, lai palielinātu drošību. Kļūdai līdz ar to nebūs vairāk par diviem zīmīgiem cipariem. (Dažos gadījumos tikai viens.)

Rezultāts vienmēr beidzams ar ciparu šķiru, kāds ir pēdējais noapaļotajā kļūdā. Rezultāts un kļūda ir ar vienādu ciparu skaitu aiz komata.

Rezultāta pierakstā, lietojot reizinātāju ar pakāpi, jāraugās, lai tas vienādi attiektos gan uz kļūdu gan pašu rezultātu.

Nenoapaļotu skaitļu atstāšana rezultāta pierakstā uzskatāma par rupju kļūdu.

PIEMĒRI:

1. $\rho \pm \Delta\rho = (1{,}1145 \pm 0{,}0127)\ \mathrm{g/cm^3} =$
   $= (1{,}115 \pm 0{,}013)\ \mathrm{g/cm^3} =$
   $= (1{,}115 \pm 0{,}013)\cdot 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$

2. $\rho \pm \Delta\rho = (1{,}1145 \pm 0{,}019)\ \mathrm{g/cm^3} =$
   $= (1{,}12 \pm 0{,}02)\ \mathrm{g/cm^3} =$
   $= (1{,}12 \pm 0{,}02)\cdot 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$

8. REZULTĀTU GRAFISKA ATTĒLOŠANA

Grafiks ir lielumu funkcionālas sakarības ģeometrisks attēls līnijas veidā uz plaknes izraudzītajā koordinātu sistēmā. No grafika var nolasīt arī tās vērtības, kas nav tieši mērītas, bet, kas ir mērīto mērskaitļu tuvumā.

Grafikus zīmējot jāievēro šādi noteikumi:

1) grafika izmēriem jābūt 10 – 20 cm katras ass virzienā;
2) jāuzraksta grafika nosaukums;
3) uz horizontālās – abscisu ass atliek neatkarīgo lielumu, bet uz vertikālās – ordinātu ass atbilstošo atkarīgo lielumu;
4) asu galos jāpieraksta uz tām atlikto lielumu apzīmējumi un to mērvienību saīsinātie apzīmējumi;
5) uz koordinātu asīm neatzīmē eksperimentā iegūtos mērskaitļus, bet ass jāsadala izraudzītajā mērogā;
6) koordinātu sākumpunkts un mērogs jāizvēlas tā, lai līkne būtu izdevīgā slīpumā ($\varphi \approx 45^\circ$);

7) mērskaitli jāatliek ar punktiem, krustiņiem, riņķīšiem;
8) grafiki jāielīmē darba protokolā;
9) uz grafika jāattēlo nolasījuma kļūda vienam punktam ideālā gadījumā vai tiem punktiem, kuri ″izlec″ no dotās sakarības;
10) kļūdu četrstūri jāatzīmē tādā mērogā, kāds grafikā lietots attiecīgo lielumu vērtībām;
11) ja liela punktu izkliede, līkne jānovelk izlīdzinoši caur šiem punktiem, pēc iespējas abās līknes pusēs atstājot vienādu punktu skaitu.